

(MAT5SKB)

(3110-52K)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, FEBRUARY 2023.

(Regular)

Third Year — Fifth Semester

Part II : Mathematics

Paper VII — MATHEMATICAL SPECIAL FUNCTIONS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 2 = 10 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Show that $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

$\beta(m, n) = \beta(n, m)$ అని చూపుము.

2. Prove that : $2[Tn(x)]^2 = 1 + T_{2n}(x)$.

$2[Tn(x)]^2 = 1 + T_{2n}(x)$ అని నిరూపించుము.

3. Find the radius of convergence of $\sum \frac{(n+1)x^n}{n(n+2)}$.

$\sum \frac{(n+1)x^n}{n(n+2)}$ యొక్క అభిసరణీయత వ్యాసార్థం కనుగొనుము.

4. Show that $x = 0$ is an ordinary point of $y'' - xy' + 2y = 0$.

$y'' - xy' + 2y = 0$ యొక్క ఒక సాధారణ బిందువు $x = 0$ అని చూపుము.

5. Prove that $H'_n(x) - 2xHn'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

$H'_n(x) - 2xHn'(x) + 2nH_n(x) = 0$ అని నిరూపించుము.

6. Find $H_0(x)$ and $H_1(x)$.

$H_0(x)$ మరియు $H_1(x)$ లను కనుగొనుము.

7. Find $\int_{-1}^1 p_0(x) dx$,

$\int_{-1}^1 p_0(x) dx$ ను కనుగొనుము.

8. Show that $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ అని చూపుము.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

9. Prove that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ అని నిరూపించుము.

10. Prove that $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$.

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$ అని నిరూపించుము.

11. Determine the singular points and their nature of $3xy'' + 2x(x-1)y' + 5y = 0$.

$3xy'' + 2x(x-1)y' + 5y = 0$ యొక్క సాధారణ బిందువు మరియు వాటి స్వభావమును నిర్ణయించండి.

12. Prove that $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$.

$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$ ను నిరూపించుము.

13. Prove that $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$; $n \geq 1$.

$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$; $n \geq 1$ అని నిరూపించుము.

14. Show that $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ అని చూపుము.

15. Show that $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ అని చూపుము.

16. Show that $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$.

$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$ అని చూపుము.

SECTION C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions.

17. (a) Show that the following.
క్రింది వాటిని చూపుము.

(i) $\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}.$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Or

- (b) Prove that $\int_{-1}^1 \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \pi/2 & \text{if } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{if } m = n = 0 \end{cases}.$

$\int_{-1}^1 \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0 \end{cases}$ అని నిరూపించుము.

18. (a) Find the solution in series of $y'' + xy' + x^2y = 0$ about $x = 0$.
 $x = 0$ దగ్గర $y'' + xy' + x^2y = 0$ యొక్క సాధనను శ్రేణిలో కనుగొనుము.

Or

- (b) Solve by power series method $y'' - xy' = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.
 $y'' - xy' = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ ను పవర్ శ్రేణి ద్వారా సాధించుము.

19. (a) State and prove orthogonal properties of Hermite polynomial.
హెర్మైట్ బహుపది యొక్క లంబచ్ఛేదన లక్షణాలను ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

- (b) State and prove Rodrigue's formula for Hermite polynomial.
హెర్మైట్ బహుపది యొక్క రోడ్రీగ్స్ సూత్రాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

20. (a) Prove that $(1-2xh+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x).$

$(1-2xh+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$ ను నిరూపించుము.

Or

- (b) Prove that $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$.
 $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ అని నిరూపించుము.

- 21 (a) Prove that $xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$.
 $xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$ అని నిరూపించుము.

Or

- (b) Show that $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ and $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$.

$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ మరియు $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ అని చూపుము.
